УДК 517.9

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ИНЕРЦИАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И НЕЛИНЕЙНЫЙ МЕТОД ГАЛЕРКИНА ДЛЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ВРЕМЕНИ

©И. Д. Чуешов

Для диссипативных квазилинейных начально-краевых задач второго порядка по времени предлагается новый метод приближенного исследования асимптотического поведения решений, опирающийся на понятие приближенного инерциального многообразия.

1. Одной из главных задач теории эволюционных нелинейных уравнений в частных производных является изучение асимптотического поведения их решений, когда время неограничено растет. Для многих классов эволюционных уравнений это поведение может быть описано с помощью глобального (максимального) аттрактора конечной размерности (см. [1-3] и ссылки, приведенные в этих работах). И хотя, в некоторых случаях, удается доказать (см. например, [2-5] и приведенные там ссылки), что глобальный аттрактор лежит на конечномерной поверхности в фазовом пространстве системы (инерциальном многообразии), вопрос о структуре аттрактора для многих ситуаций, интересных с точки зрения приложений, остается открытым. Это обстоятельство привело к возникновению понятия приближенного инерциального многообразия [6], использование которого позволяет, с одной стороны, локализовать аттрактор, а с другой, предложить новый эффективный метод (так называемый нелинейный метод Галеркина) численного исследования асимптотического поведения решений [7]. Отметим, что близкое понятие обсуждалось ранее для некоторых классов конечномерных систем (см. обзор [8]).

В последние годы приближенные инерциальные многообразия и связанные с ними варианты нелинейного метода Галеркина исследовались для широкого класса параболических систем. Библиографические указания по этому поводу см., например, в [9], а также в [3,5]. Однако все эти исследования существенно используют регуляризующий эффект, имеющийся для параболических уравнений (решение в момент $t > 0$ является более гладким, чем его начальное значение).

Целью данной работы является построение и исследование свойств некоторых вариантов нелинейного метода Галеркина для эволюционных квазилинейных уравнений второго порядка по времени. Для этих уравнений регуляризующий эффект отсутствует. Представленные ниже рассмотрения носят общий характер и опираются на конструкцию приближенных инерциальных многообразий для данного класса уравнений, приведенную в [10].

2. Рассмотрим диссипативное дифференциальное уравнение второго поряд- ка по времени в гильбертовом пространстве H вида:

$$\partial_t^2 u + \gamma \partial_t u + Au = B(u), \quad u|_{t=0} = u_0, \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1, \tag{1}$$

где γ -положительное число, A - положительный самосопряженный оператор с дискретным спектром, $B(\cdot)$ - нелинейное отображение из области определения $D(A^{1/2})$ оператора $A^{1/2}$ в H такое, что для некоторого целого числа $m \geq 2$ $B(u)$ лежит в C^m как отображение из $D(A^{1/2})$ в H и для каждого $\rho > 0$ выполняются следующие оценки:

$$\|\langle B^{(k)}(u); w_1, \dots, w_k\rangle\| \leq c_\rho \cdot \prod_{j=1}^{k} \|A^{1/2} w_j\|, \tag{2}$$

$$\|\langle B^{(k)}(u) - B^{(k)}(u^*); w_1, \dots, w_k\rangle\| \leq c_\rho \cdot \|A^{1/2}(u - u^*)\| \cdot \prod_{j=1}^{k} \|A^{1/2} w_j\|, \tag{3}$$

где $k = 0, 1, \dots, m$, $\|\cdot\|$ - норма в пространстве H, $\|A^{1/2}u\| \leq \rho$, $\|A^{1/2}u^*\| \leq \rho$, $w_j \in D(A^{1/2})$. Здесь $B^{(k)}(u)$ - производная Фреше порядка k от $B(u)$, $\langle B^{(k)}(u); w_1, \dots, w_k\rangle$ - ее значение на элементах $w_1, \dots, w_k$. Предполагается также, что задача (1) корректно разрешима в $D(A^{1/2}) \times H$ и в $D(A) \times D(A^{1/2})$.

Пусть L_m - класс решений задачи (1), обладающих следующими свойствами регулярности:

i). для $k = 0, 1, \dots, m-1$ и для всех $T > o$

$$u^{(k)}(t) \in C(0, T; D(A))$$

и

$$u^{(m)}(t) \in C(0, T; D(A^{1/2})), \quad u^{(m+1)}(t) \in C(0, T; H),$$

где $C(0, T; V)$ - пространство сильно непрерывных функций на $[0, T]$ со значениями в V, здесь и ниже $u^{(k)}(t) = \partial_t^k u(t)$;

ii) существует $R > 0$ такое, что

$$\|u^{(k+1)}(t)\|^2 + \|A^{1/2}u^{(k)}(t)\|^2 + \|Au^{(k-1)}(t)\|^2 \leq R^2 \tag{4}$$

для $k = 0, 1, \dots, m$ и $t \geq t^*$, где t^* зависит только от u_0 и u_1.

Фактически классы L_m исследовались в [11]. В этой работе содержатся необходимые и достаточные условия, гарантирующие принадлежность решения классу L_m. Отметим, что в [11] в качестве основного примера рассматривается нелинейное волновое уравнение вида

$$\begin{gathered} \partial_t^2 u + \gamma \partial_t u - \Delta u + g(u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad t > 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = u_0(x), \quad \partial_t u|_{t=0} = u_1(x), \end{gathered} \tag{5}$$

где $\gamma > 0$, $f(x) \in C^\infty(\overline{\Omega})$, а условия на функцию $g(s)$ из $C^\infty(R)$ таковы, что мы можем положить $g(u) = \sin u$ или $g(u) = u^{2p+1}$, где $p = 0, 1, 2, \dots$ для $d = \dim \Omega \leq \leq 2$ и $p = 0, 1$ для $d = 3$. В этом примере классы L_m не пусты для всех m.

Зафиксируем целое число N и обозначим через $P = P_N$ проекцию в H на подпространство, порожденное первыми N собственными векторами оператора A. Пусть $Q = I - P$. Из результатов работы [10] вытекает следующее утверждение.

Теорема 1. *Существует семейство отображений $\{h_k; l_k\}$ из $PH \times PH$ в $QD(A)$, обладающее следующими свойствами:*

i). найдутся константы $M_j \equiv M_j(n, \rho)$ и $L_j \equiv L_j(n, \rho)$, $j = 1, 2$, такие, что

$$\|Ah_n(p_0, p_0)\| \leq M_1, \quad \|A^{1/2} l_n(p_0, p_0)\| \leq M_2, \tag{6}$$

$$\|A[h_n(p_1, p_1) - h_n(p_2, p_2)]\| \leq L_1[\|A(p_1 - p_2)\| + \|A^{1/2}(p_1 - p_2)\|], \tag{7}$$

$$\|A^{1/2}[l_n(p_1,p_1)-l_n(p_2,p_2)]\|\le L_2[\|A(p_1-p_2)\|+\|A^{1/2}(p_1-p_2)\|], \tag{8}$$

для всех p_j и p_j лежащих в PH и таких, что

$$\|Ap_j\|^2+\|A^{1/2}p_j\|^2\le\rho^2,\ \ j=0,1,\ \ \rho>0;$$

ii). для любого решения $u(t)$ задачи (1), лежащего в L_m при $m\ge 2$, справедлива для всех $n\le m-1$ и достаточно больших t оценка

$$\{\|A(u(t)-u_n(t))\|^2+\|A^{1/2}(\partial_t u(t)-\overline{u}_n(t))\|^2\}^{1/2}\le C_{n,R}\,\lambda_{N+1}^{-n/2}, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} u_n(t)&=p(t)+h_n(p(t),\partial_t p(t)),\\ \overline{u}_n(t)&=\partial_t p(t)+l_n(p(t),\partial_t p(t)), \end{aligned} \tag{10}$$

$\lambda_{N+1}-(N+1)$ -е собственное число для A, R - константа из (4).

Отметим (см. [10]), что семейство $\{h_k;l_k\}$ определяется с помощью достаточно простой итерационной процедуры, сводящейся к решению стационарных уравнений вида $Av=g$ в подпространстве QH. При этом

$$h_0(p,p)\equiv l_0(p,p)\equiv 0,\ \ h_1(p,p)=A^{-1}QB(p),\ \ l_1(p,p)\equiv 0. \tag{11}$$

Теорема 1, в частности, означает, что траектории $U(t)=(u(t);\partial_t u(t))$ системы (1) притягиваются малой (при больших N) окрестностью многообразия

$$M_n=\{(p+h_n(p,p);\ p+l_n(p,p)):\ p,\ p\in PH\}. \tag{12}$$

Эти многообразия называются приближенными инерциальными. В том случае, когда система (1) обладает глобальным аттрактором $\mathcal{A}$, элементы которого принадлежат пространству $D(A^{m/2})\times D(A^{(m-1)/2})$ для некоторого $m\ge 2$, можно доказать, что для любой траектории $U(t)$, лежащей в аттракторе, оценки (9) справедливы для всех $t\in R$. При этом

$$\sup\{\operatorname{dist}(y,M_n):\ y\in\mathcal{A}\}\le C_n\cdot\lambda_{N+1}^{-n/2},$$

где $\operatorname{dist}(y,M)$ - расстояние между элементом y и множеством M в пространстве $D(A)\times D(A^{1/2})$.

Последовательность отображений $\{h_n(p,p)\}$ порождает семейство приближенных инерциальных форм задачи (1):

$$\partial_t^2 p+\gamma\partial_t p+Ap=PB(p+h_n(p,\partial_t p)). \tag{13}$$

Каждой такой форме отвечает конечномерная динамическая система в PH, аппроксимирующая в определенном смысле исходную систему. При $n=0$ в силу (11) уравнение (13) превращается в обычную галеркинскую аппроксимацию задачи (1). А при $n>0$ получается семейство численных методов, которые естественно называть нелинейными методами Галеркина (см. [7,9], где аналогичная конструкция обсуждалась для системы Навье-Стокса). Однако непосредственно воспользоваться уравнением (13) при численном моделировании нельзя. Дело в том, что, во-первых, при вычислении $h_n(p,p)$ при- ходится решать линейное уравнение в бесконечномерном пространстве QH, а во-вторых, может быть потеряно свойство диссипативности. Поэтому необходимы обрезания и дискретизации. Они могут быть сделаны следующим образом. Пусть $f_n(p,p)$ обозначает одну из функций $h_n(p,p)$ или $l_n(p,p)$. Определим величину

$$\begin{aligned} f_n^*(p,p)&\equiv f_{N,M,n}(p,p)=\\ &=\chi(R^{-1}((\|Ap\|^2+\|A^{1/2}p\|^2)^{1/2})P_M f_n(p,p). \end{aligned} \tag{14}$$

где $\chi(s)$ -бесконечно дифференцируемая функция на R_+ такая, что i) $0 \le \chi(s) \le 1$; ii) $\chi(s) = 1$ при $0 \le s \le 1$; iii) $\chi(s) = 0$ при $s \ge 2$; R -радиус диссипативности (см. (4) при $k = 1$) системы (1); P_M - ортопроектор в H на подпространство, порождаемое первыми M собственными векторами оператора A, $M > N$. Рассмотрим следующее N -мерное эволюционное уравнение в подпространстве $P_N H$:

$$\begin{gathered} \partial_t^2 p^* + \gamma \partial_t p^* + A P^* = P_N B(p^* + h_n^*(p^*, \partial_t p^*)), \\ p^*|_{t=0} = P_N u_0, \ \partial_t p^*|_{t=0} = P_N u_1. \end{gathered} \tag{15}$$

Легко проверить, что задача (15) имеет единственное решение при $t > 0$, а соответствующая динамическая система является диссипативной в $P_N H \times P_N H$. Эту задачу мы будем называть нелинейной галеркинской (n, N, M) - аппроксимацией задачи (1). Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Предположим, что отображения $h_n(p, p)$ и $l_n(p, p)$ таковы, что выполнены соотношения (6)-(9) при $n \le m - 1$ для некоторого $m \ge 2$, причем (9) справедливо для всех $t > 0$. Пусть h_n^* и l_n^* определяются по h_n и l_n согласно (14) и*

$$u_n^*(t) = p^*(t) + h_n^*(p^*(t), \partial_t p^*(t)),$$

$$\overline{u}_n^*(t) = \partial_t p^*(t) + l_n^*(p^*(t), \partial_t p^*(t)),$$

где $p^*(t)$ -решение задачи (15). Тогда справедлива оценка

$$\begin{gathered} \{\|A^{1/2}(u(t) - u_n^*(t))\|^2 + \|\partial_t u(t) - \overline{u}_n^*(t)\|^2\}^{1/2} \le \\ \le [\alpha_1 \cdot \lambda_{N+1}^{-(n+1)/2} + \alpha_2 \cdot \lambda_{M+1}^{-1/2}] \exp(\beta t), \end{gathered} \tag{16}$$

где $u(t)$ -решение задачи (1), лежащее в L_m при $m \ge 2$ и обладающее свойством (4) при $k = 1$ для всех $t > 0$. Здесь $n \le m - 1$, α_1, α_2, β -положительные константы, независящие от M и N, λ_k – k–тое собственное число оператора A.

Для доказательства этой теоремы необходимо сравнить решение $p^*(t)$ задачи (15) с величиной $p(t) = P_N u(t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\partial_t^2 p + \gamma \partial_t p + Ap = P_N B(p(t) + (1 - P_N) u(t)),$$

с теми же начальными условиями что и функция $p^*(t)$. Соответствующие рассуждения используют соотношения (2)-(4), (6)-(9) и носят достаточно стандартный характер.

Если в теореме 2 положить $n = 0$ и $N = M$, то оценка (16) превращается в оценку точности обычного метода Галеркина порядка N. Поэтому, если параметры N, M и n согласованы так, чтобы $\lambda_{M+1} \le \lambda_{M+1}^{n+1}$, то погрешность соответствующего нелинейного метода Галеркина имеет тот же порядок малости, что и обычный галеркинский метод, использующий M базисных функций. Однако при использовании нелинейного метода приходится решать задачу Коши для системы (15), состоящей из N уравнений и некоторый набор линейных алгебраических систем порядка $M - N$. В частности, при $n = 1$ для определения величины $h_1(p, p)$ необходимо решать уравнение

$$Ah_1(p, p) = (P_M - P_N) Q B(p),$$

а числа N и M выбирать так, чтобы $\lambda_{M+1} \le \lambda_{N+1}^2$. Если при этом $\lambda_k \cong c_0 k^\sigma (1 + o(1))$, $\sigma > 0$, когда $k \to \infty$, то величины M и N должны быть согласованы так, чтобы $M \le c_\sigma N^2$.

В заключение отметим, что теоремы 1 и 2, а также соответствующий вариант нелинейного метода Галеркина, могут быть использованы для асимптотического исследования решений нелинейного волнового уравнения (5) при некотрых условиях на нелинейный член $g(u)$. Кроме того, используя методы, представленные в [11], нетрудно проверить, что условия теорем 1 и 2 выполнены для модифицированной системы уравнений Кармана, возникающей при исследовании колебаний упругой оболочки в сверхзвуковом потоке газа (об асимптотических свойствах решений этой системы см., например, [3,12] и ссылки, приведенные в этих работах). Могут быть указаны и некоторые другие применения этих теорем.

1. *Бобин А.В., Вишик М.И.* , Аттракционы эволюционных уравнений. - М. : Наука, 1989. - 294 с.
2. *Temam R.*, Infinite-dimensional dynamical systems in mechanics and physics. - NY : Springer, 1988. - 500 p.
3. *Чуешов И.Д.* , Глобальные аттракторы в нелинейных задачах математической физики // Успехи мат. наук. - 1993. - **48**, *N 2*.
4. *Constantin P., Foias C., Nikolaenko B., Temam R.*, Integral manifolds and inertial manifolds for dissipative partial differential equations // NY : Springer, 1989. - 124 p.
5. *Чуешов И.Д.* , Введение в теорию инерциальных многообразий // Харьков : изд. Харьков. ун-та, 1992. - 88 с.
6. *Foias C., Manley O., Temam R.*, Modeling of the interaction of small and largr eddies in two dimensional turbulent flows // Math. Mod. Num. Anal. - 1988. - **22**, - С. 93–114.
7. *Marion M. Temam R.*, Nonlinear Galerkin methods // SIAM J. Num. Anal. - 1989. - **26**, - С. 1139–1157.
8. *Лыкова О.Б.* , Развитие метода интегральных многообразий Боголюбова-Митропольского // Укр. матем. журнал. - 1992. - **44**, *N 1*. - С. 33–46.
9. *Devulder C., Marion M., Titi E.*, On the rate of convergence of the nonlinear Galerkin methids // (Preprint Equoipe d'Analyse Numerique Lyon Saint-Etienne , N.125), Lyon, - 1991. - 36 p.
10. *Chueshov I.D.*, Approximate inertial manifolds for second order evolution equation // Докл. АН Украины. - 1993. -*N* 3. – P. 49–52.
11. *Ghidaglia J.-M., Temam R.*, Regularity of solutions of second order evolution equations and their attractors // Ann. della Scuola Norm. Sup. Pisa. - 1987. -**14**. - P. 485–511.
12. *Чуешов И.Д.* , Конечномерность аттрактора в некоторых задачах нелинейной теории оболочек // Матем. сб. - 1987. - **133(175)** - С. 419–428.